

「複雑系とは何か」(元は高校生用の教材)

岡本義雄

yossi@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

素粒子論や宇宙論といったマイクロとマクロの世界の研究は 20 世紀の前半に大きく進んだ。しかし、肝心の身の回りの世界の解析はなかなか進まなかった。それはあまりにたくさんの要素が関係する複雑な現象が多すぎて、当時の計算能力と数学ではそれを完全に解析したり、予測することが困難であったからである。

ところが、そのような複雑な現象を解析する方法がようやく 20 世紀の末に続々と登場した。まず天気予報がなぜ難しいのかということに関して、ローレンツは「カオス」という考え方をあてはめる。次に海岸線の形の複雑さを解析するなかで、マンデルブローは「フラクタル」という概念を発見した。さらに地震や生物の進化という複雑な現象の一端をバクらは「自己組織化臨界現象 (SOC)」という新たな考え方を提示して、見事に説明した。さらに、それまでの微分方程式に頼る手法から、格子モデル (セルオートマトン) や計算機科学の発展に伴う新たな手法を開拓することになる。ここに至って、複雑な自然の中に隠された単純なルールを探すという「複雑系科学」という考え方が登場する。そして、それは自然現象だけでなく、経済現象、例えば株価の変動や都市の大きさといった社会的な解析へ、また、脳や我々の意識のあり方といった人間にまつわる様々な現象の解析へと留まるところを知らない発展ぶりを示している。「複雑系科学」の扱う題材はこのように、身の回りにありふれてふだん目にしていても関わらず、意外と予測が難しいような現象を多く扱う。

1) 次に簡単に諸概念の解説を行う

「カオス」 Chaos

天気予報がなぜ外れるかということ、将来に渡って予想する方程式は確立している。それは運動方程式と状態方程式である。

ところが、これらの方程式は元々、初期値にきわめて敏感である。ある日の天気を予想するにはその前の日など過去の天気の情報を使うが、そのデータに少しでも実際の値と異なる誤差が含まれていたり、その観測点の密度が粗かったりすると、予測がどんどん外れてしまう。この現象を Lorentz は「カオス」と呼んだ。つまり方程式はあるのに、その解を求めるための観測が有限であるため、誤差がどんどん溜まって予測がはずれるということである。これを専門家は「決定論的カオス」 deterministic chaos と呼ぶ。方程式がわかっているのに未来が十分正確に予測できない。天気予報の予測が基本的に難しいのはこれによる。

「フラクタル」 Fractal あるいは「べき乗則」 Power Laws

地図に海岸線が描かれているとき、縮尺を示すスケールが入っていないと、どれくらいの範囲の地図が分からないことがよくある。これは海岸線の形だけでは、地図のスケールがわからないことを意味する。言葉を変えると、地図はどのような縮尺の地図でも、海岸線の形がよく似ていることを示す。つまり海岸線の形は「自己相似」 self-similar であるということになる。これは人間や、他の様々なものがその平均的な大きさを持っているのに、自然界には平均的な大きさが無い現象もたくさんあるということである。例えば、地震のサイズ、雲の輪郭、月の表面のクレータのサイズ、ある種のブロッコリの形、動物の血管の太さの分布などがこれにあたる。IBM の研究者であった Benoit Mandelbrot はこれを「フラクタル」と呼んだ。特に「地震のサイズの個数の関係」は昔からゲーテンベルグ・リヒター則 (G-R 則) といわれ、地震という一見複雑な自然現象の中に隠された統計的に単純な性質をあぶりだす。なお、フラクタルは G-R 則のような「べき乗則」 power law が幾何学的な分布に現れるときによく用いる言葉で、スペクトルで同じような現象が生じる場合を「1/f ゆらぎ」という場合がある。

「自己組織化臨界現象」 Self Organized Criticality (SOC)

1987 年に Per Bak らは「砂山モデル」 sand-pile model という簡単なモデルを考えついた。砂山に砂を一粒ずつ落としていくと砂山ができるが、やがて砂山はある限界に達し、砂粒を一つ落としただけで小さな雪崩 avalanche から砂山全体が崩れるような(catastrophic)大きな雪崩まで起こす状態になる。彼はこれを「臨界状態」 critical state と呼んだ。この臨界状態では、生じる雪崩のサイズと個数の関係がみごとな「べき分布 (フラクタル分布)」になることが分かった。実際には彼はこれを本物の砂山ではなく、簡単な計算機上のモデル実験として計算し、見事な関係が導かれることを調べた。この「砂山モデル」は直後に地震のサイズと個数の関係 (G-R 則) を見事に説明したほか、その亜流のモデルは生物の進化や絶滅の解析などにも応用されている。さらに株価変動など社会的な現象の原因究明を目指して現在でもその様々な応用が研究されている。なお彼が自己組織化と呼んだのは、最初、砂山が何の手助けもなく自分で勝手に「臨界状態」に達することを呼んだ。しかし現在では上記の生物や進化、人間の脳の働き、さらには経済活動など、さまざまな社会現象には、外部からの調整 (チューニング) なしに、自然に自己組織化し臨界状態に達していると考えられる現象が多くあるということが研究者の努力でわかってきている。さらに興味深いのはこのように「臨界状態」に達した現象の多くが、未来の状態の予測が極めて難しい現象と重なることである。

<セル・オートマトン(Cellular automaton, CA)>

上記の様々な複雑系特有の性質を確かめるための計算手法として、従来物理分野で主流であった、微分方程式の数値解法とは別に、計算機上での簡単な格子モデル化やシミュレーションが多用されるようになった。自然現象を簡単な格子のモデルで置き換える。そのとき各格子の情報量を整数などで、置き換える。そしてそこに単純なルールをあてはめて、時間経過により格子の状態変化をみるというのがこの手法の特徴。単純なルールから複雑な結果が得られることから、様々な分野の計算やモデル化での応用がみられる。古くはフォンノイマンなどに端を発し、1970 年代のライフゲームや 1980 年代のウルフラム、ラングトンなどの研究で一躍確固たる地位を築いた。

2) 続いて上記の簡単な例を紹介する。

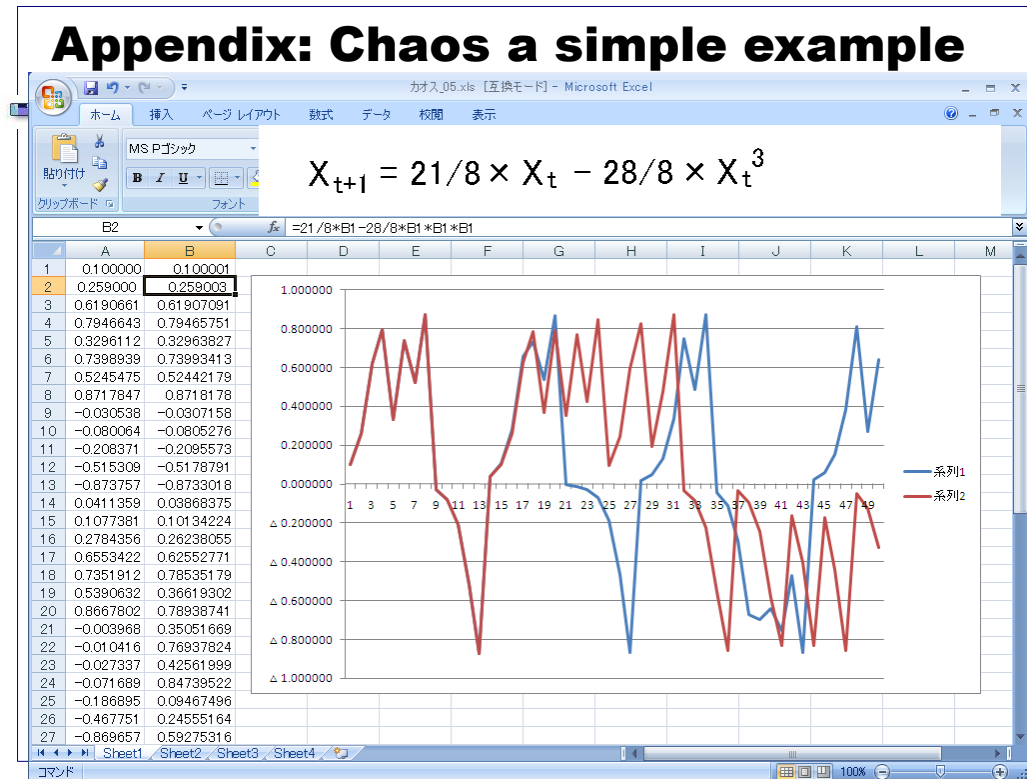
<カオスの例>

Ex1.たとえば次の漸化式をエクセルで再計算しグラフ化する。

$$X_{t+1} = 21/8 \cdot X_t - 28/8 \cdot X_t^3$$

※ 右写真は 2002 年秋に来日したときの Mandelbrot 氏 (京都工芸繊維大学にて、筆者撮影)





⇒計算結果は第 19 周期ごろから大きくずれてくる。

Ex2. ロバート・メイの式 (UK の生物学者ロバート・メイは、生物の世代交代における個体数の変遷を表す簡単な式を考えたが、この式では大変ふしぎな性質が現れる。

$$X_{t+1} = r \cdot X_t \cdot (1 - X_t)$$

ここで、 t は世代 ($t=0,1,2,3\cdots$), X_t は世代 t における個体数を規格化した値 ($0 \leq X_t \leq 1$), r は繁殖率 ($0 < r < 4$)を示します。 r に色んな値を入れて、エクセルで再計算させてみよう。

<フラクタル (べき乗則) の例>

Ex1. Gutenberg-Richter 則

地震のサイズと個数の関係の統計を取ると、地域や時代に関係なく、両対数グラフで直線関係を見せるみごとな「べき分布」がみられる。これを G-R 則と呼んでいる。これと似た関係として、

- ・海岸線の長さや図るサイズの関係
- ・月や火星の表面のクレータのサイズと個数の関係
- ・山火事のサイズと個数の関係
- ・個人資産と人数、企業資産と企業数の関係 (Pareto 則ともいう)

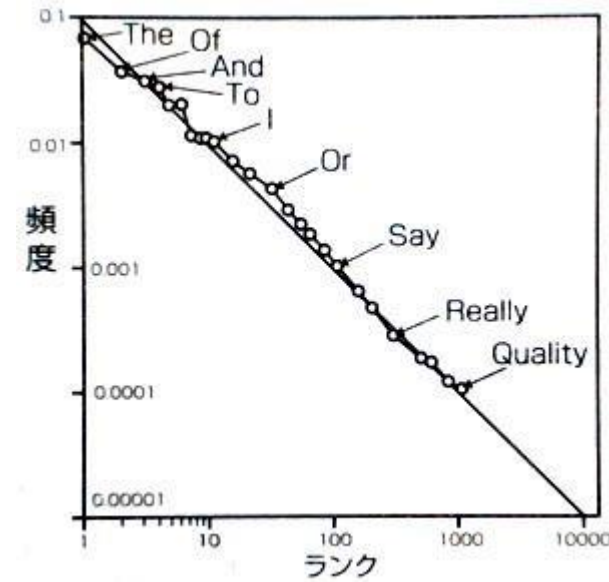
など幅広い例がみられる。ネットなどでどんな例がほかにあるかを調べてみよう。

※ 図形の重きをおくときには「フラクタル」、統計に重きをおくときは「べき乗則」という場合が多い。

Ex2. Zipf の法則

自然現象や社会現象で、あるランキングを作るとそのランクと量や頻度の関係がみごとな「べき分布 (べき乗則を満たす分布)」となることがある。

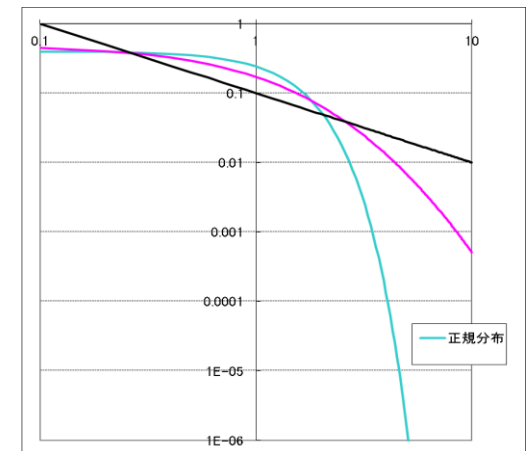
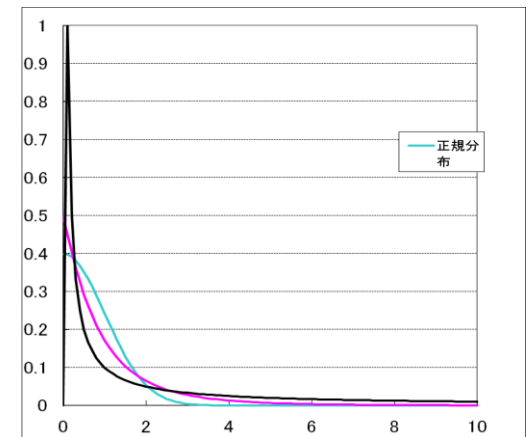
有名な例として、単語の出現頻度 vs. ランクの関係 (元々の Zipf の法則はここから)。



- ほかに、企業のランクと売上高の関係
- 都市の人口とランク
- 湖の面積とランク
- 川の長さやランク
- ネットのサイトの訪問者ランクと順位の関係
- Amazon などの書籍の売り上げランクと順位の関係

⇒Long Tail or Fat Tail (右図)
(Chris Anderson, 2005)

cf. 通常の軸と対数軸の違い (Long Tail)



<自己組織化臨界現象>の例

Ex1. 砂山モデル (Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile model, 英語版 wikipedia より)

The iteration rules for the 2D model are as follows:
Starting with a flat surface $z(x,y) = 0$ for all x and y :
Add a grain of sand: randomly choosing a site

$$Z(x,y) = z(x,y) + 1$$

And avalanche if $z(x,y) > z_c$:

$$Z(x,y) = z(x,y) - 4$$

$$Z(x+1,y) = Z(x+1,y) + 1$$

$$Z(x-1,y) = Z(x-1,y) + 1$$

$$Z(x,y+1) = Z(x,y+1) + 1$$

$$Z(x,y-1) = Z(x,y-1) + 1$$

This system is interesting in that it is attracted to its critical state, at which point the correlation length of the system and the correlation time of the system go to infinity, without any fine tuning of a system parameter. This contrasts with earlier examples of critical phenomena, such as the phase transitions between solid and liquid, or liquid and gas, where the critical point can only be reached by precise tuning (usually of temperature). Hence, in the sandpile model we can say that the criticality is self-organized.

※ SOC が成り立つ現象では、個数とサイズの関係が「べき乗則」を満たす場合があることがわかる。

<セル・オートマトン>の他の例

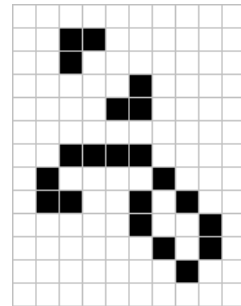
Ex1. ライフゲーム(Conway's Game of Life)は1970年にイギリスの数学者ジョン・ホートン・コンウェイ(John Horton Conway)によって考案された生命の誕生、進化、淘汰などのプロセスを簡易的なモデルで再現したシミュレーションゲームである。単純なルールでその模様の変化を楽しめるため、パズルの要素を持っている。(wikipedia より)

セルの生死は次のルールに従う。

- 誕生: 死んでいるセルに隣接する生きてきたセルがちょうど3つあれば、次の世代が誕生する。
- 生存: 生きているセルに隣接する生きてきたセルが2つか3つならば、次の世代でも生存する。
- 過疎: 生きているセルに隣接する生きてきたセルが1つ以下ならば、過疎により死滅する。
- 過密: 生きているセルに隣接する生きてきたセルが4つ以上ならば、過密により死滅する。

下に中央のセルにおける次のステップでの生死の例を示す。生きているセルは■、死んでいるセルは□で表す。

維持(生)	誕生	死	



世代を経るごとのパターンの変遷が楽しい(右図: <http://www.conwaylife.com/w/images/6/63/20P2.png>)

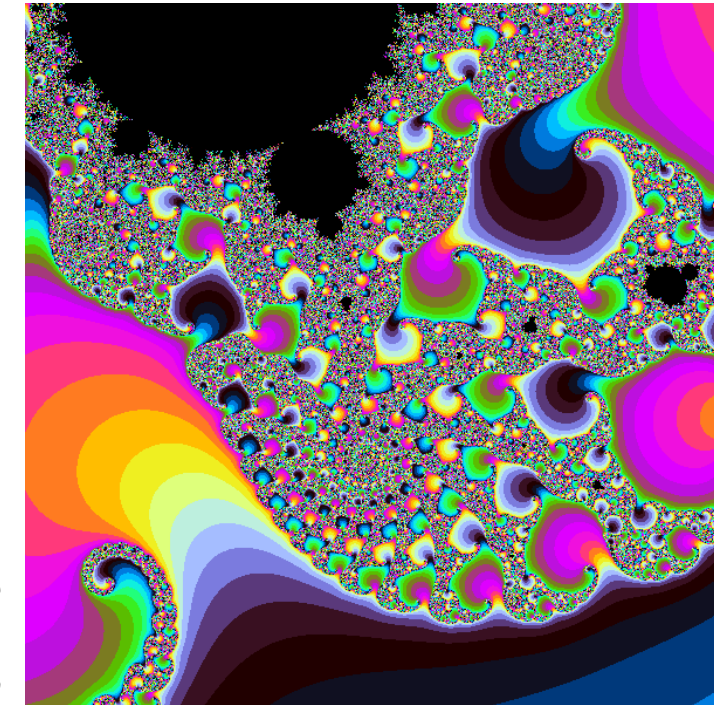
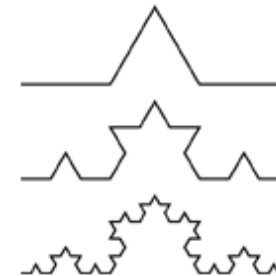
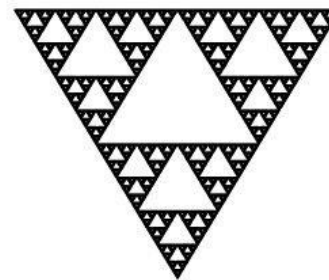
Ex 2. 基石モデル

1971年に当時熊本大学にいた大塚道男が地震におけるG-R則の原因として考え出したコンピュータモデル。これを松崎光弘氏(当時大阪短期大学, 現(株)知識創発研究所代表)が簡単なじゃんけんによるゲームに改良した(松崎, 1989私信)。さらにそれを私(岡本)が鉛筆のサイコロを使うものに改良。

これは後に「浸透モデル」percolationと物理の専門家が呼ぶものと同等と判明。現在ではこの改良版が様々な自然現象や社会現象のモデリングに用いられている。

例: 山火事, 伝染病, うわさなどの伝播のシミュレーション。磁性的イジングモデル。など。

- ※ ライフゲームや砂山モデルはネットで検索すると、フリーのものが幾つか見つかるので遊んでみると楽しい。
- ※ フラクタル図形の例 (Googleの画像検索より)



<参考文献>

- 「複雑系」: M・M・ワールドロップ/田中ほか訳, 新潮文庫, 933円
- 歴史は「べき乗則」で動く: マークブ・キャナン/水谷訳, ハヤカワ文庫 840円
- フラクタル: 高安秀樹, 朝倉書店 2700円