2012 年度「固体地球科学Ⅱ」第 11 回　「複雑系」入門　　岡本義雄（科学教育センター）

0）「複雑系」とは何か

素粒子論や宇宙論といったミクロとマクロの世界の研究は20世紀の前半に大きく進んだ．しかし，肝心の身の回りの世界の解析はなかなか進まなかった．それはあまりにたくさんの要素が関係する複雑な現象が多すぎて，当時の計算能力と数学ではそれを完全に解析したり，予測することが困難であったからである．

ところが，そのような複雑な現象を解析する方法が計算機の発展に伴って，ようやく 20 世紀の末に続々と登場した．まず天気予報がなぜ難しいのかということに関して，気象学者のローレンツは「カオス」（Lorentz，1963）という考え方を登場させた．海岸線の形の複雑さや綿花の価格変動を解析していた，IBM フェローのマンデルブローは「フラクタル」（Mandelbrot，1976）という概念を発見した．さらに地震や生物の進化という複雑な現象の一端をバクは簡単なシミュレーションで解析し「自己組織化臨界現象（SOC)」（Bak，1987）というものを発見する．これらは，それまでの微分方程式に頼る手法から，格子モデル（セルオートマトン）など計算機科学の新たな手法の開拓につながる．ここに至って，複雑な自然の中に隠された単純なルールを探すという「複雑系科学」という考え方が登場する．同時に，それは自然現象だけでなく，経済現象，例えば株価の変動や都市の大きさといった社会的な解析へ，また，脳や我々の意識のあり方といった人間にまつわる様々な現象の解析へと留まるところを知らない発展ぶりを示している．「複雑系科学」はこのように，身の回りにありふれてふだん目にしているにも関わらず，意外と予測が難しいような現象を主に扱う意外性にあふれた新しい科学の流れを総称する．

1）次に簡単に諸概念の解説を行う

「カオス」Chaos，より正確には Deterministic Chaos

天気予報の基本となる，方程式は確立している．それは大気の運動方程式と状態方程式である．

ところがこの方程式が，初期値にきわめて敏感であることをローレンツは偶然見出した．つまり明日の天気を予想するには今日の天気のデータ（観測値）を使うのだが，そのデータに少しでも実際のデータと異なる誤差が含まれていたり，その観測データが粗かったりすると，予測がある時点からどんどん外れてしまう．この現象をローレンツは「カオス」と呼んだ．つまり方程式はある（決定論的）のに，その初期値を求めるための観測が有限でなおかつ誤差を含むため，将来の予測が正確にできない．これを専門家は「決定論的カオス」と呼ぶ．方程式はわかっているのに未来が十分正確に予測できない．天気予報の予測が基本的に難しいのはこれによる．

「フラクタル」Fractal

地図に海岸線が描かれているとき，縮尺を示すスケールが入っていないと，どれくらいの範囲の地図か分からないことがよくある．これは海岸線の形だけでは，地図のスケールがわからないことを意味する．言葉を変えると，地図はどのような縮尺の地図でも，海岸線の形がよく似ているということを示す．つまり海岸線の形は「自己相似」であるということになる．これは人間や，他の様々なものがその平均的な大きさを持っているのに，自然界には平均的な大きさがない現象もたくさんあるということである．例えば，地震のサイズ，雲の輪郭，地層の表面，月の表面のクレータのサイズ，植物の形態，動物の血管の太さの分布などがこれにあたる．マンデルブロはこれを「フラクタル」と呼んだ．なお，「フラクタル」は形や模様など幾何学的性質について特に注目するときに用いられ，時間的に同じような現象が起こる場合を 1/f ゆらぎという場合がある．

さらに数学的には，「フラクタル」で見られる両対数グラフで直線であらわされる関数を「べき関数」とよび，それで表される関係を「べき乗則」（Power Law）「べき分布」と呼ぶ．世の中には「べき乗則」であらわされるものが大変多いということがわかってきた．特に「地震のサイズの個数の関係」は昔からグーテンベルグ・リヒター則（G-R 則）といわれ，地震という一見複雑な自然現象の中に隠された統計的に単純な性質をあぶりだす．またこの関数は経済活動や社会活動でも良く見られる（後述）．

「自己組織化臨界現象」Self Organized Criticality（SOC）

1987 年に Per Bak は「砂山モデル」という簡単なモデルを考えついた．砂山に砂を一粒ずつ落としていくと砂山ができるが，やがて砂山はある限界に達し，砂粒を一つ落としただけで小さな雪崩から砂山全体が崩れるような大きな雪崩まで起こす状態になる．彼はこれを「臨界状態」と呼んだ．この臨界状態では，生じる雪崩のサイズと個数の関係がみごとな「べき分布（フラクタル分布）」になることが分かった．さらに彼はこれを実際の砂山ではなく，簡単な計算機上のモデル実験として計算し，見事な関係が導かれることを調べた．この「砂山モデル」は直後に地震のサイズと個数の関係（G-R 則）を見事に説明したほか，生物にまつわる諸現象や株価変動など社会的な現象の原因究明を目指して現在でもその様々な応用が研究されている．なお彼が自己組織化と呼んだのは，砂山が外部からの調整なしに「臨界状態」に達することを呼んだのであるが，現在では上記の生物の機能や古生物の進化，人間の脳の働き，さらには経済市場やネット空間などさまざまな社会現象のなかにさえ，このような自己組織化と臨界が見られることが研究者によって指摘されている．同時にこのように「臨界状態」に達した現象の多くが，未来の状態の予測が極めて難しい現象ばかりであることも大変興味深い．

＜セル・オートマトン(Cellular automaton, CA)＞

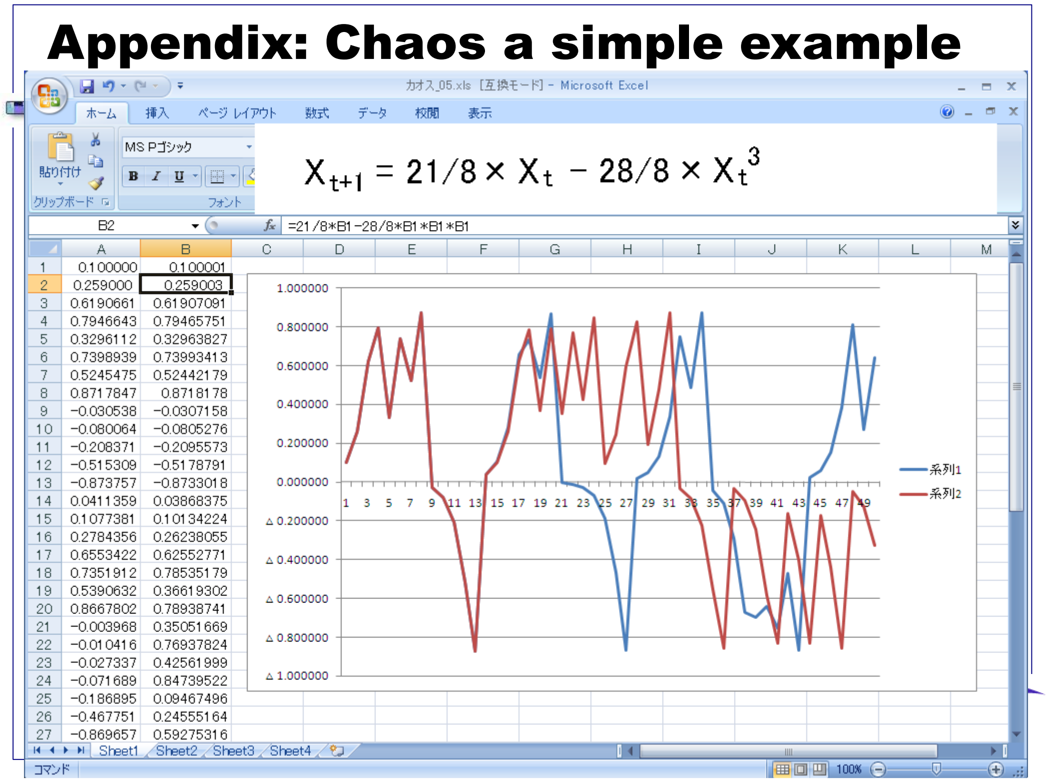
上記の性質を確かめるための計算手法で，主として計算機のモデル化やシミュレーションに多用されるようになった．自然現象を簡単な格子のモデルで置き換える．そのとき各格子の情報量を整数などで，置き換える．そしてそこに単純なルールをあてはめて，時間経過により格子の状態発展をみるというのがこの手法の特徴. 単純なルールから複雑な結果が得られることから，様々な分野の計算やモデル化での応用がみられる．古くはフォンノイマンなどに端を発し，1970 年代のライフゲームや 1980 年代のウルフラムなどの研究で一躍確固たる地位を築いた．

2）続いて上記の簡単な例を紹介する．

＜カオスの例＞

Ex 1．たとえば次の漸化式をエクセルで再計算しグラフ化する．

$$X_{t+1} = 21/8 \cdot X_t - 28/8 \cdot X_t^3$$



	A	B
1	0.100000	0.100001
2	0.259000	0.259003
3	0.6190661	0.61907091
4	0.7946643	0.79465751
5	0.3296112	0.32963827
6	0.7398939	0.73993413
7	0.5245475	0.52442179
8	0.8717847	0.8718178
9	−0.030538	−0.0307158
10	−0.080064	−0.0805276
11	−0.208371	−0.2095573
12	−0.515309	−0.5178791
13	−0.873757	−0.8733018
14	0.0411359	0.03868375
15	0.1077381	0.10134224
16	0.2784356	0.26238055
17	0.6553422	0.62552771
18	0.7351912	0.78535179
19	0.5390632	0.36619302
20	0.8667802	0.78938741
21	−0.003968	0.35051669
22	−0.010416	0.76937824
23	−0.027337	0.42561999
24	−0.071689	0.84739522
25	−0.186895	0.09467496
26	−0.467751	0.24555164
27	−0.869657	0.59275316

⇒計算結果は第 19 周期ごろから大きくずれてくる．

Ex2．ロバート・メイの式（UK の生物学者ロバートメイは，生物の世代交代における個体数の変遷を表す簡単な式を考えたが，この式では大変ふしぎな性質が現れる．

$X_{t+1} = r \cdot X_t \cdot (1 - X_t)$

ここで，tは世代（t=0,1,2,3･･･），Xtは世代tにおける個体数を規格化した値（0<=Xt<=1），rは繁殖率（0<=a<=4）を示します．r に色んな値を入れて，エクセルで再計算させてみよう．

Ex3．本家気象学者ローレンツの式（変数 x,y,z で定数 a,b,c によりふるまいが決まる）

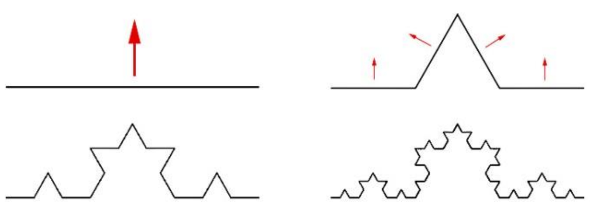
$$\frac{dx}{dt} = -px + py \qquad \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \qquad \frac{dz}{dt} = xy - bz$$

＜フラクタルの例＞

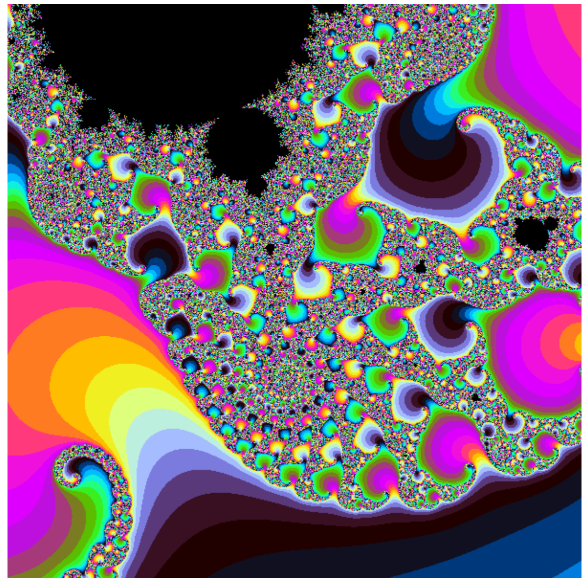
Ex1．コッホ曲線

1 回の操作で線分の長さが 4/3 倍になる

フラクタル次元は log4 / log3 = 1.26186...次元となる



Ex2．フラクタル図形の例（右図）



その他，「べき乗則」の例としては下記が有名．

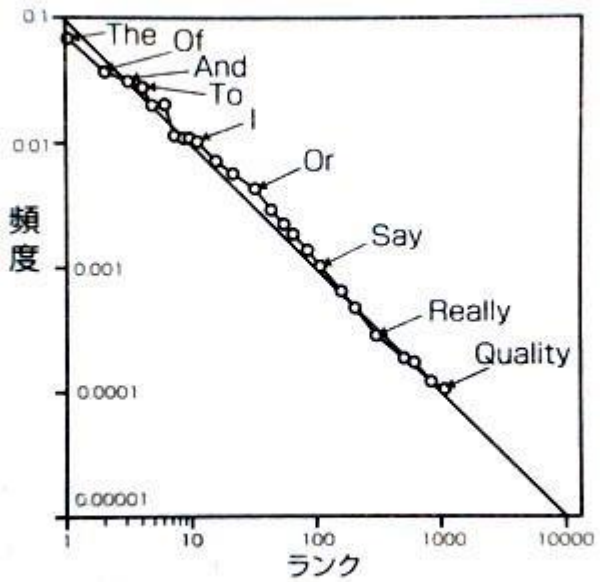
Ex１．Gutenberg-Richter 則

地震のサイズと個数の関係の統計を取ると，地域や時代に関係なく，見事なべき分布がみられる．これを G-R 則と呼んでいる．地震の空間・時間分布について統計を取るとここでもさまざまなべき分布が見られる．また断層の分布形態は自己相似構造を示す．

Ex２．Zipf の法則

自然現象や社会現象で，あるランキングを作るとそのランクと量や頻度の関係がみごとな「べき分布」となることがある．

有名な例として，単語の出現頻度 vs.ランクの関係．



ほかに，企業のランクと売上高の関係

GDP とランク

都市人口とランク

湖の面積とランク

川の長さとランク

など興味深い例が観察される．ぜひ統計の資料をもとに面白い例を探してみよう．

＜実習＞

2010～11 年度　外食産業売上ランキング

Ex３．Pareto 則

店では，２割の商品の売り上げが全体の８割に寄与する．

企業では，２割の人の頑張りが売上の８割に寄与する．

ただし，2005 年 Wired 誌の編集長クリス・アンダーソンはネットの発展でこれに対抗する「ロングテール現象」が可能であることを示した．

（例）Amazon.com　YouTube　など

Ex４．Benford 則：統計における数字の最初は１から始まることが多い．

電気料金の請求書，住所の番地，株価，人口の数値，死亡率，川の長さ，物理・数学定数、冪乗則で表現されるような過程で多く見られるという．⇒粉飾決算の立証に使う？

＜自己組織化臨界現象＞の例

Ex1．砂山モデル（Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile model，英語版 wikipedia より）

The iteration rules for the 2D model are as follows:
Starting with a flat surface $z(x,y) = 0$ for all x and y:
Add a grain of sand: randomly choosing a site

$Z(x,y)=z(x,y)+1$

And avalanche　if $z(x,y) > zc$:

$Z(x,y)=z(x,y)-4$
$Z(x+1,y)= Z(x+1,y)+1$
$Z(x-1,y)= Z(x-1,y)+1$
$Z(x,y+1)= Z(x,y+1)+1$
$Z(x,y-1)= Z(x,y-1)+1$

This system is interesting in that it is attracted to its critical state, at which point the correlation length of the system and the correlation time of the system go to infinity, without any fine tuning of a system parameter. This contrasts with earlier examples of critical phenomena, such as the phase transitions between solid and liquid, or liquid and gas, where the critical point can only be reached by precise tuning (usually of temperature). Hence, in the sandpile model we can say that the criticality is self-organized.

このモデルは計算機での数値実験であるが，それを実際の砂山で実験したのが右の図.

砂山モデルの実験

＜セル・オートマトン＞の例

＜１次元セルオートマトン(Cellular automaton, CA)＞　Wikipedia より

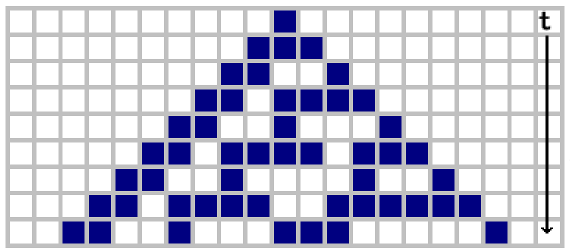
　スティーブン・ウルフラム（Stephen Wolfram、1959 年 8 月 29 日 - ）はアメリカ合衆国の Wolfram Research 社の創業者で最高経営責任者。また、理論物理学者でもある。
15 歳にして素粒子論の学術論文を執筆し、オックスフォード大学を 17 歳で卒業。その後カリフォルニア工科大学（CalTech）に進み、高エネルギー物理学、場の理論、宇宙論の研究を行った。20 歳で理論物理学の研究により、カリフォルニア工科大学において Ph.D. の学位を取得。その一方で、コンピューターを用いた代数計算の方法を検討していた。1981 年にこのアイディアを具現化した数学ソフト（Mathematica の前身の SMP（Symbolic Manipulation Program））を商業リリース。1982 年より、現在では『複雑系』に分類される自然界の複雑さについて研究。セル・オートマトンに関する革新的研究を行った。カリフォルニア工科大学、プリンストン高等研究所、イリノイ大学で教授を歴任した後、1986 年に複雑系研究の学術センター、Wolfram Research Inc. を設立。同分野の学術雑誌を創刊した。
　数学ソフト Mathematica の開発は 1986 年より行い、1988 年 6 月 23 日に最初のバージョンをリリース。1991 年にバージョン 2 をリリースした後は、Mathematica の開発と自然科学の研究を並行して行っている。
　ノーベル物理学賞受賞者のリチャード・P・ファインマンをして、「カリフォルニア工科大学で次にノーベル物理学賞を受賞するのは彼だ」と言わしめた。　と wikipedia にある.

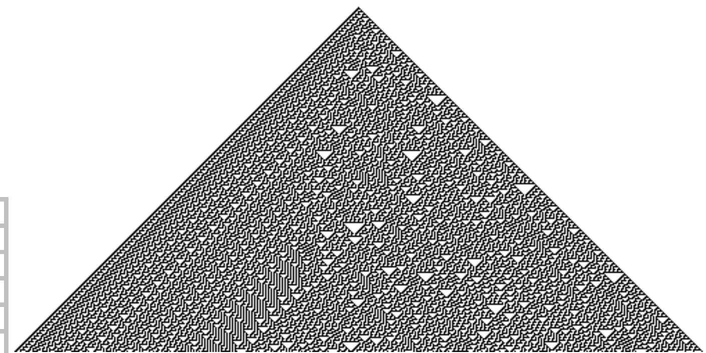
彼の 1 次元セル・オートマトンは、線状(ひも状)であり、あるセルに隣接するセルは 2 個であり、セル・オートマトンの中でも最もシンプルなものである。

以下に「ルール 30」と分類される 1 次元セル・オートマトンの例を示す。
・「ルール 30」と呼ばれるのは、時刻 t+1 における中央のセルの内部状態一覧を並べると 0,0,0,1,1,1,1,0 となっており、この 2 進数の数を 10 進数に直すと 30 であるためである。このようにして 28 = 256 通りある 1 次元セル・オートマトンのルールを分類しているのである。

ルール 30								
時刻 t での内部状態(左、中央、右)	111	110	101	100	011	010	001	000
時刻 t+1 での中央のセルの内部状態	0	0	0	1	1	1	1	0

下図は、最初の内部状態が 1 である 1 個のセルが、時間とともに発展する様子である。(線状のセルを、時間順に、下方へと並べている)





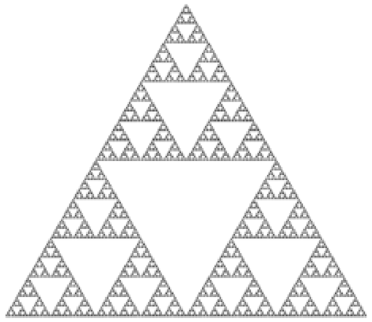
右上図は、さらに時間が経過した様子。

右下図はセル・オートマトン状模様の貝殻(イモ貝)

複雑で自己反復的な三角形の模様を作り出している。これはクラス４の典型的な振舞いである。ウルフラムはこのパターンが、ある種の貝殻の表面にある模様に大変よく似ていることに気づき、セル・オートマトンこそが複雑な自然現象を説明するために重要な鍵を握っていると考えた。

　また、ルール 90 の１次元セル・オートマトンは典型的なフラクタル図形であるシェルピンスキーのギャスケットを生成する。

ルール 90								
時刻 t での内部状態	111	110	101	100	011	010	001	000
時刻 t+1 での中央のセルの内部状態	0	1	0	1	1	0	1	0



＜２次元セル・オートマトン＞の例

ライフゲーム（Conway，1970）

格子上に適当に生物を置く．次のルールに応じた時間発展を調べる．

ルール

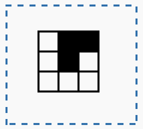
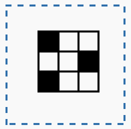
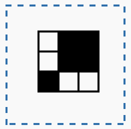
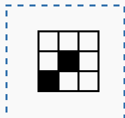
誕生：死んでいるセルに隣接する生きたセルがちょうど 3 つあれば、次の世代が誕生する。

生存：生きているセルに隣接する生きたセルが 2 つか 3 つならば、次の世代でも生存する。

過疎：生きているセルに隣接する生きたセルが 1 つ以下ならば、過疎により死滅する。

過密：生きているセルに隣接する生きたセルが 4 つ以上ならば、過密により死滅する。

下に中央のセルにおける次のステップでの生死の例を示す。生きているセルは■、死んでいるセルは□で表す。

維持（生）	誕生	死	
			

世代を経るごとのパターンの変遷が楽しい．作品例はネット上に多数あり．

あと，２次元の格子モデルは他に，「浸透モデル（Percolation Model）」（碁石モデルはこの一例）「相転移モデル」など各種ある．

・山火事，伝染病，うわさなどの伝搬

・磁性体の相転移

・絶縁体のショート　など

§．複雑系の応用例

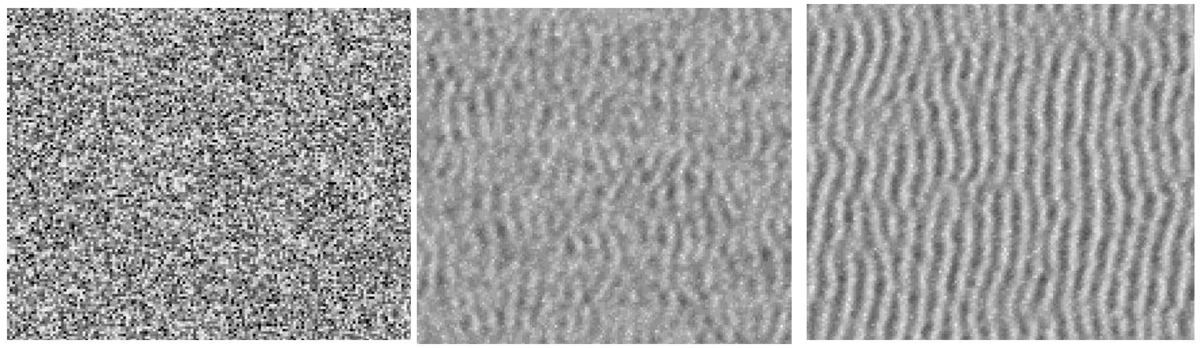
・単純なルールで再現される自然現象の例

＜風紋＞

　１）高い場所ほど，遠くに砂が跳ぶ．

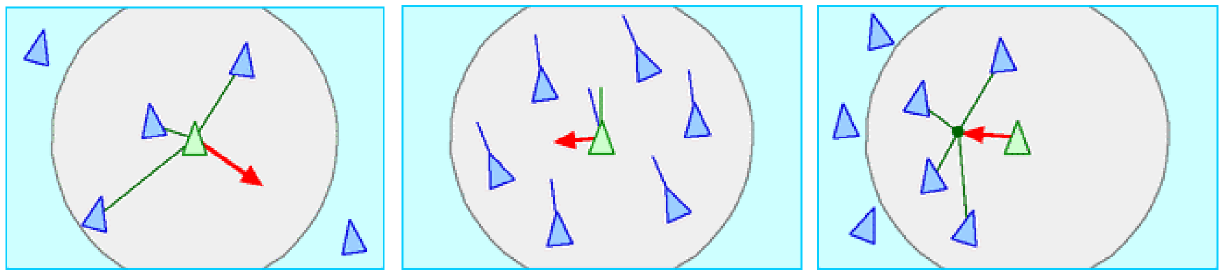
　２）砂の表面はときどきならされる．

の２つの論理で作れる．



＜鳥や魚の群れ＞

Boids is an [artificial life] program, developed by [Craig Reynolds] in 1986.



Separation: steer to avoid crowding flockmates

Alignment: steer towards the average heading of local flockmates

Cohesion: steer to move toward the average position local of local flockmates

この上記３つの論理と，ときどき気まぐれに方向を変える鳥（魚）を群れの中に設定するだけで，本当の生物の群れのような動きを PC 画面上に再現することができる．

実際の計算結果は

http://www.red3d.com/cwr/boids/