2010 年度　プルーフⅠ　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本担当　　地学分野

第1回　「複雑系とは何か」

素粒子論や宇宙論といったミクロとマクロの世界の研究は 20 世紀の前半に大きく進んだ.しかし,肝心の身の回りの世界の解析はなかなか進まなかった.それはあまりにたくさんの要素が関係する複雑な現象が多すぎて,当時の計算能力と数学ではそれを完全に解析したり,予測することが困難であったからである.

ところが,そのような複雑な現象を解析する方法がようやく 20 世紀の末に続々と登場した.まず天気予報がなぜ難しいのかということに関して,ローレンツは「カオス」という考え方をあてはめる.次に海岸線の形の複雑さを,マンデルブローは「フラクタル」という概念を発見した.さらに地震や生物の進化という複雑な現象の一端をバクは「自己組織化臨界現象(SOC)」という新たな考え方を提示して,見事に説明した.さらに,それまでの微分方程式に頼る手法から,格子モデル(セルオートマトン)や計算機科学の発展に伴う新たな手法を開拓することになる.ここに至って,複雑な自然の中に隠された単純なルールを探すという「複雑系科学」という考え方が登場する.そして,それは自然現象だけでなく,経済現象,例えば株価の変動や都市の大きさといった社会的な解析へ,また,脳や我々の意識のあり方といった人間にまつわる様々な現象の解析へと留まるところを知らない発展ぶりを示している.「複雑系科学」の扱う題材はこのように,身の回りにありふれてふだん目にしているにも関わらず,意外と予測が難しいような現象を多く扱う.

1)次に簡単に諸概念の解説を行う

「カオス」Chaos

天気予報がなぜ外れるかというと,将来に渡って予想する方程式は実は確立している.

運動方程式と状態方程式がそれである.

ところが,これらの方程式は元々,初期値にきわめて敏感である.つまりある日の天気を予想するにはその前の日の天気の情報を使うのだが,そのデータに少しでも実際のデータと異なる誤差が含まれていたり,その観測データが粗かったりすると,予測がどんどん外れてしまう.この現象をローレンツは「カオス」と呼んだ.つまり方程式はあるのに,その解を求めるための観測が有限であるため,誤差がどんどん溜まって予測がはずれるということである.これを専門家は「決定論的カオス」と呼ぶ.方程式がわかっているのに未来が十分正確に予測できない.天気予報の予測が基本的に難しいのはこれによる.

「フラクタル」Fractal

地図に海岸線が描かれているとき,縮尺を示すスケールが入っていないと,どれくらいの範囲の地図か分からないことがよくある.これは海岸線の形だけでは,地図のスケールがわからないことを意味する.言葉を変えると,地図はどのような縮尺の地図でも,海岸線の形がよく似ているということを示す.つまり海岸線の形は「自己相似」であるということになる.これは人間や,他の様々なものがその平均的な大きさを持っているのに,自然界には平均的な大きさがない現象もたくさんあるということである.例えば,地震のサイズ,雲の輪郭,月の表面のクレータのサイズ,ある種のブロッコリの形,動物の血管の太さの分布などがこれにあたる.マンデルブロはこれを「フラクタル」と呼んだ.特に「地震のサイズの個数の関係」は昔からグーテンベルグ・リヒター則(G-R 則)といわれ,地震という一見複雑な自然現象の中に隠された統計的に単純な性質をあぶりだす.なお,フラクタルは空間的な分布のときによく用いる言葉で,時間的に同じような現象が起こる場合を 1/f ゆらぎという場合がある.

「自己組織化臨界現象」Self Organized Criticality(SOC)

1987 年に Per Bak は「砂山モデル」という簡単なモデルを考えついた.砂山に砂を一粒ずつ落としていくと砂山ができるが,やがて砂山はある限界に達し,砂粒を一つ落としただけで小さな雪崩から砂山全体が崩れるような大きな雪崩まで起こす状態になる.彼はこれを「臨界状態」と呼んだ.この臨界状態では,生じる雪崩のサイズと個数の関係がみごとな「べき分布(フラクタル分布)」になることが分かった.さらに彼はこれを実際の砂山ではなく,簡単な計算機上のモデル実験として計算し,見事な関係が導かれることを調べた.この「砂山モデル」は直後に地震のサイズと個数の関係(G-R 則)を見事に説明したほか,生物にまつわる諸現象や株価変動など社会的な現象の原因究明を目指して現在でもその様々な応用が研究されている.なお彼が自己組織化と呼んだのは,砂山が何の手助けもなく自分で勝手に「臨界状態」に達することを呼んだのであるが,現在では上記の生物や進化,人間の脳の働き,さらには経済活動などさまざまな社会現象が誰が調整するのでもなく,自然に自己組織化し,臨界状態に達している

と考えられることが多くの研究者の努力でわかってきている.さらに興味深いのはこのように「臨界状態」に達した現象がほとんど例外なく,未来の状態の予測が極めて難しい現象ばかりであることも解ってきている.

＜セル・オートマトン(Cellular automaton, **CA**)＞

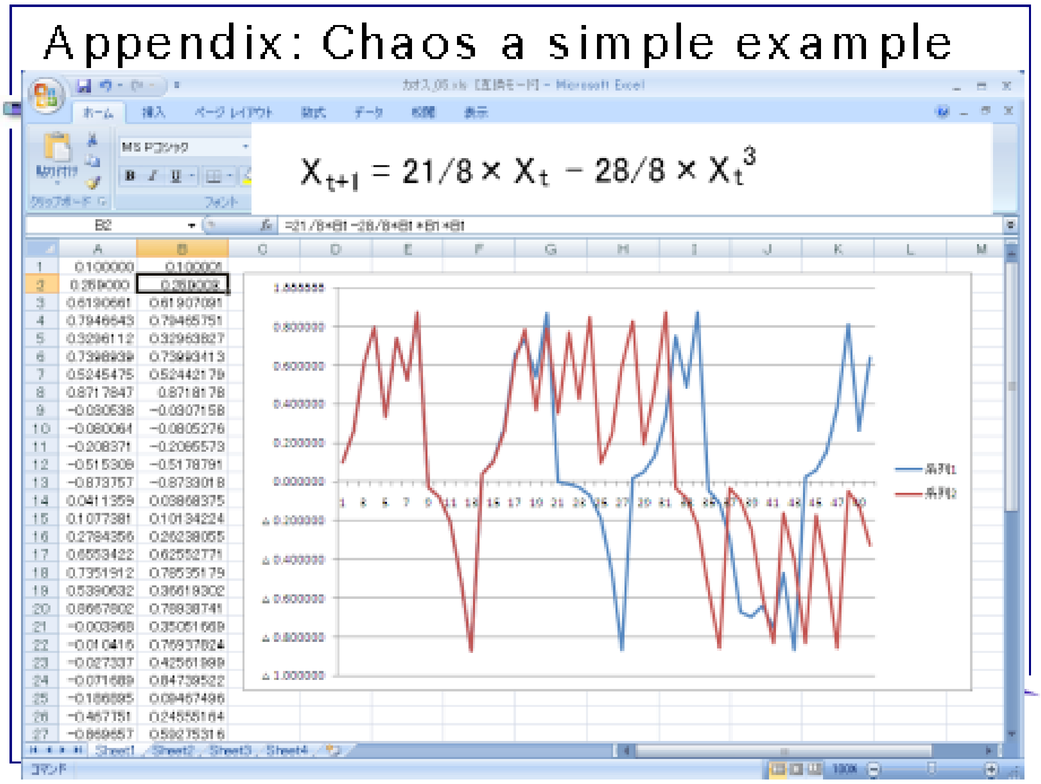
上記の性質を確かめるための計算手法で,主として計算機のモデル化やシミュレーションに多用されるようになった.自然現象を簡単な格子のモデルで置き換える.そのとき各格子の情報量を整数などで,置き換える.そしてそこに単純なルールをあてはめて,時間経過により格子の状態変化をみるというのがこの手法の特徴.単純なルールから複雑な結果が得られることから,様々な分野の計算やモデル化での応用がみられる.古くはフォンノイマンなどに端を発し,1970 年代のライフゲームや 1980 年代のウルフラムなどの研究で一躍確固たる地位を築いた.

2)続いて上記の簡単な例を紹介する.

＜カオスの例＞

Ex1.たとえば次の漸化式をエクセルで再計算しグラフ化する.

$X_{t+1}=21/8\cdot X_t-28/8\cdot X_t^3$



⇒計算結果は第 19 周期ごろから大きくずれてくる.

Ex2.ロバート・メイの式（UK の生物学者ロバートメイは,生物の世代交代における個体数の変遷を表す簡単な式を考えたが,この式では大変ふしぎな性質が現れる.

$X_{t+1}=r\cdot X_t\cdot(1-X_t)$

ここで, tは世代 (t=0,1,2,3･･･), X tは世代tにおける個体数を規格化した値 (0<=X t<=1), rは繁殖率 (0<=a<=4)を示します.rに色んな値を入れて,エクセルで再計算させてみよう.

＜フラクタルの例＞

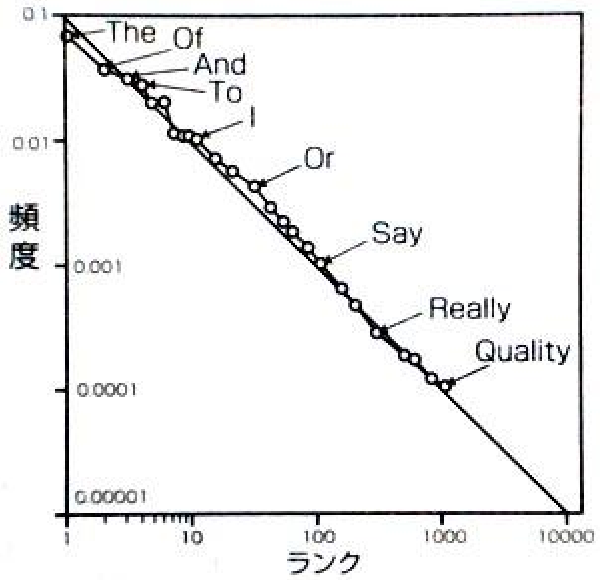
Ex1.Gutenberg-Richter 則

地震のサイズと個数の関係の統計を取ると，地域や時代に関係なく，見事なべき分布がみられる．これを G-R 則と呼んでいる．簡単な例を授業で確かめてみよう．

またこれら，サイズと個数の関係の関連では，
・海岸線の長さと図る道具の関係
・月や火星の表面のクレータのサイズと個数の関係
・山火事のサイズと個数の関係
・個人資産と人数の関係
など幅広い例がみられる．ネットなどでどんな例がほかにあるかを調べてみよう．

Ex 2.Zipf の法則
自然現象や社会現象で，あるランキングを作るとそのランクと量や頻度の関係がみごとな「べき分布」となることがある．

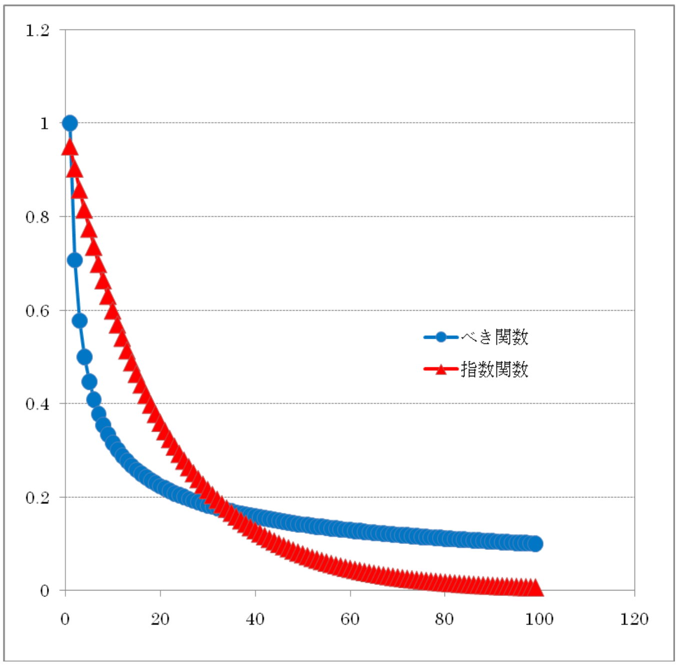
有名な例として，単語の出現頻度 vs.ランクの関係．



ほかに，企業のランクと売上高の関係
GDP とランク
湖の面積とランク
川の長さとランク
など興味深い例が観察される．ぜひ統計の資料をもとに面白い例を探してみよう．

＜べきと指数の違い＞
指数関数　$y=a^x$
べき関数　$y=x^a$

右のグラフ
べきの方が減衰が速いが，遠くまで結構しぶとく長持ちする．



＜自己組織化臨界現象＞の例

Ex1.砂山モデル（Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile model，英語版 wikipedia より）
The iteration rules for the 2D model are as follows:
Starting with a flat surface z(x,y) = 0 for all x and y:

Add a grain of sand: randomly chosing a site

$Z(x,y)=z(x,y)+1$

And avalanche if $z(x,y) > zc$:

$Z(x,y)=z(x,y)-4$

$Z(x+1,y)= Z(x+1,y)+1$

$Z(x-1,y)= Z(x-1,y)+1$

$Z(x,y+1)= Z(x,y+1)+1$

$Z(x,y-1)= Z(x,y-1)+1$

This system is interesting in that it is attracted to its critical state, at which point the correlation length of the system and the correlation time of the system go to infinity, without any fine tuning of a system parameter. This contrasts with earlier examples of critical phenomena, such as the phase transitions between solid and liquid, or liquid and gas, where the critical point can only be reached by precise tuning (usually of temperature). Hence, in the sandpile model we can say that the criticality is self-organized.

＜セル・オートマトン＞の例

Ex1.ライフゲーム(*Conway's Game of Life*)は1970年にイギリスの数学者ジョン・ホートン・コンウェイ (John Horton Conway) によって考案された生命の誕生、進化、淘汰などのプロセスを簡易的なモデルで再現したシミュレーションゲームである。単純なルールでその模様の変化を楽しめるため、パズルの要素を持っている。(wikipedia より)

＜セルの生死のルール＞

誕生：死んでいるセルに隣接する生きたセルがちょうど3つあれば、次の世代が誕生する。

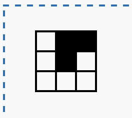
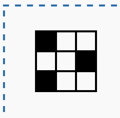
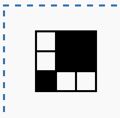
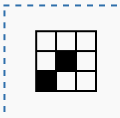
生存：生きているセルに隣接する生きたセルが2つか3つならば、次の世代でも生存する。

過疎：生きているセルに隣接する生きたセルが1つ以下ならば、過疎により死滅する。

過密：生きているセルに隣接する生きたセルが4つ以上ならば、過密により死滅する。

右に中央のセルにおける次のステップでの生死の例を示す。生きているセルは■、死んでいるセルは□で表す.

世代を経るごとのパターンの変遷が楽しい.

維持(生)	誕生	死	
			

Ex 2.碁石モデル

1971年に当時熊本大学にいた大塚道男が地震におけるG-R則の原因として考え出したコンピュータモデル.これを松崎光弘（当時大阪短期大学）が簡単なゲームに改良した（松崎，1989私信）.さらにそれを私（岡本）が鉛筆のサイコロを使うものに改良.

これは後に「浸透モデル」と物理の専門家が呼ぶものと同等と判明.現在ではこの改良版が様々な自然現象や社会現象のモデリングに用いられている.

3)参考文献などは別紙

※ ライフゲームや砂山モデルはネットで検索すると，フリーのものが幾つか見つかるので遊んでみると楽しい.

フラクタル図形の例（Googleの画像検索より）